1^{re} Spécialité NSI

Corrigé – Logique booléenne : simplifications et tableaux de vérité

Symboles : ET $\&$, OU $|$, NON $\overline{a}$

Exercice 1 (4 points) *Niveau : application* — **Tableaux de vérité à 2 variables**

(a), (b), (c), (d)

Tableau global :

a	b	$F(a,b) = a \,\&\, b$	$G(a,b) = a \mid b$	$H(a,b) = \overline{a} \,\&\, b$	$I(a,b) = (\overline{a} \,\&\, b) \mid (a \,\&\, \overline{b})$
0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	1
1	1	1	1	0	0

Lignes où la fonction vaut 1 :

- $F(a,b)$: uniquement $a = 1, b = 1$.
- $G(a,b)$: toutes sauf $a = 0, b = 0$.
- $H(a,b)$: uniquement $a = 0, b = 1$.
- $I(a,b)$: $a \neq b$ (c'est un XOR).

Exercice 2 (4 points) *Niveau : application* — **Tableaux de vérité à 3 variables**

On considère $F(a,b,c) = a \,\&\, (b \mid c)$ et $G(a,b,c) = (a \mid b) \,\&\, \overline{c}$.

a	b	c	$F(a,b,c)$	$G(a,b,c)$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	1
0	1	1	0	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	1
1	1	1	1	0

(c) Forme somme de produits pour F

Là où $F = 1$: $(a,b,c) = (1,0,1), (1,1,0), (1,1,1)$.

$$\begin{aligned} F(a,b,c) &= (1,0,1) : a \,\&\, \overline{b} \,\&\, c \\ &\mid (1,1,0) : a \,\&\, b \,\&\, \overline{c} \\ &\mid (1,1,1) : a \,\&\, b \,\&\, c \end{aligned}$$

$$= (a \,\&\, \overline{b} \,\&\, c) \mid (a \,\&\, b \,\&\, \overline{c}) \mid (a \,\&\, b \,\&\, c).$$

(éventuellement : on retrouve l'expression simplifiée $F = a \,\&\, (b \mid c)$).

Exercice 3 (6 points) *Niveau : standard* — **Simplification d'expressions (2 variables)**

(a) $F_1 = a \,\&\, (a \mid b)$

$$F_1 = (a \,\&\, a) \mid (a \,\&\, b) = a \mid (a \,\&\, b) = a$$

(lois d'absorption).

(b) $F_2 = (a \mid b) \,\&\, (a \mid \overline{b})$

$$\begin{aligned} F_2 &= (a \mid b)(a \mid \overline{b}) \\ &= a \mid (b \,\&\, \overline{b}) \quad \text{(distributivité)} \\ &= a \mid 0 = a. \end{aligned}$$

(c) $F_3 = (a \mathbin{\&} b) \mid (a \mathbin{\&} \overline{b})$

$$F_3 = a \mathbin{\&} (b \mid \overline{b}) = a \mathbin{\&} 1 = a.$$

(d) $F_4 = (a \mid b) \mathbin{\&} (\overline{a} \mid b)$

$$\begin{aligned} F_4 &= (a \mid b)(\overline{a} \mid b) \\ &= a\overline{a} \mid ab \mid \overline{a}b \mid bb \\ &= 0 \mid ab \mid \overline{a}b \mid b \\ &= b \mathbin{\&} (a \mid \overline{a} \mid 1) = b. \end{aligned}$$

Exercice 4 (6 points) *Niveau : standard* — **Simplification d'expressions (3 variables)**

(a) $F_1 = (a \mid b) \mathbin{\&} (a \mid c)$

$$F_1 = a \mid (b \mathbin{\&} c).$$

(b) $F_2 = (\overline{a} \mathbin{\&} b) \;\mid\; (a \mathbin{\&} b) \;\mid\; (a \mathbin{\&} c)$

$$\begin{aligned} (\overline{a} \mathbin{\&} b) \;\mid\; (a \mathbin{\&} b) &= b(\overline{a} \mid a) = b, \\ F_2 &= b \;\mid\; (a \mathbin{\&} c). \end{aligned}$$

(c) $F_3 = (a \mathbin{\&} b) \;\mid\; (\overline{a} \mathbin{\&} b) \;\mid\; (\overline{b} \mathbin{\&} c)$

$$\begin{aligned} (a \mathbin{\&} b) \;\mid\; (\overline{a} \mathbin{\&} b) &= b(a \mid \overline{a}) = b, \\ F_3 &= b \;\mid\; (\overline{b} \mathbin{\&} c) \\ &= (b \mid \overline{b}) \mathbin{\&} (b \mid c) = b \mid c. \end{aligned}$$

(d) $F_4 = (a \mathbin{\&} \overline{b}) \;\mid\; (a \mathbin{\&} b) \;\mid\; (\overline{a} \mathbin{\&} \overline{b})$

$$\begin{aligned} (a \mathbin{\&} \overline{b}) \;\mid\; (a \mathbin{\&} b) &= a(\overline{b} \mid b) = a, \\ F_4 &= a \;\mid\; (\overline{a} \mathbin{\&} \overline{b}) \\ &= (a \mid \overline{a}) \mathbin{\&} (a \mid \overline{b}) = a \mid \overline{b}. \end{aligned}$$

Exercice 5 (6 points) *Niveau : standard* — **Tableaux de vérité et simplification**

(a) $F(a,b,c) = (a \mathbin{\&} b) \;\mid\; (\overline{a} \mathbin{\&} b) \;\mid\; (a \mathbin{\&} \overline{c})$

$$\begin{aligned} (a \mathbin{\&} b) \;\mid\; (\overline{a} \mathbin{\&} b) &= b(a \mid \overline{a}) = b, \\ F(a,b,c) &= b \;\mid\; (a \mathbin{\&} \overline{c}). \end{aligned}$$

Tableau de vérité :

a	b	c	$F(a,b,c)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Forme simplifiée : $\boxed{F = b \;\mid\; (a \mathbin{\&} \overline{c})}$.

(b) $G(a,b,c) = (a \mid b) \;\&\; (a \mid \overline{c}) \;\&\; (\overline{a} \mid b)$
On commence par simplifier les deux facteurs avec b :

$$\begin{aligned}(a \mid b)(\overline{a} \mid b) &= a\overline{a} \mid ab \mid \overline{a}b \mid bb \\ &= 0 \mid ab \mid \overline{a}b \mid b \\ &= b.\end{aligned}$$

Donc :

$$G(a,b,c) = b \,\&\, (a \mid \overline{c}).$$

Tableau de vérité :

a	b	c	$G(a,b,c)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Forme simplifiée : $\boxed{G = b \,\&\, (a \mid \overline{c})}$.

Exercice 6 (5 points) *Niveau : défis* — **Montrer des équivalences**

(a) $F_1 = a \mid (a \,\&\, b)$ et $G_1 = a$

$$F_1 = a \mid (a \,\&\, b) = a.$$

Donc F_1 et G_1 sont équivalentes (mêmes tableaux de vérité).

(b) $F_2 = (a \,\&\, b) \;\mid\; (a \,\&\, \overline{b})$ et $G_2 = a$

$$F_2 = a \,\&\, (b \mid \overline{b}) = a.$$

Donc F_2 et G_2 sont équivalentes.

(c) $F_3 = (a \mid b) \;\&\; (a \mid \overline{b})$ et $G_3 = a$

$$F_3 = (a \mid b)(a \mid \overline{b}) = a.$$

Donc F_3 et G_3 sont équivalentes.

Exercice 7 (7 points) *Niveau : défis* — **À partir d'un tableau de vérité**

Tableau donné :

a	b	c	$F(a,b,c)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

(a) Somme de produits

Là où $F = 1$:

$$001,\ 010,\ 011,\ 101,\ 110,\ 111.$$

Donc :

$$
\begin{aligned}
F(a,b,c) = {} & \overline{a} \mathbin{\&} \overline{b} \mathbin{\&} c \\
& \mid\ \overline{a} \mathbin{\&} b \mathbin{\&} \overline{c} \\
& \mid\ \overline{a} \mathbin{\&} b \mathbin{\&} c \\
& \mid\ a \mathbin{\&} \overline{b} \mathbin{\&} c \\
& \mid\ a \mathbin{\&} b \mathbin{\&} \overline{c} \\
& \mid\ a \mathbin{\&} b \mathbin{\&} c.
\end{aligned}
$$

(b) Simplification

On remarque que $F = 0$ uniquement lorsque $b = 0$ et $c = 0$, quel que soit a. Ainsi $F = 1$ dès que $b = 1$ ou $c = 1$.

Donc :

$$\boxed{F(a,b,c) = b \ \mid\ c.}$$

Exercice 8 (8 points) *Niveau : problème* — **Situation concrète : système d'alarme**

Rappel des conditions :

- — la porte est ouverte la nuit : $P = 1$ et $N = 1$;
- — ou la fenêtre est ouverte la nuit : $F = 1$ et $N = 1$;
- — ou la porte et la fenêtre sont toutes les deux ouvertes : $P = 1$ et $F = 1$.

(a) Expression booléenne

$$\boxed{A(P,F,N) = (P \mathbin{\&} N) \ \mid\ (F \mathbin{\&} N) \ \mid\ (P \mathbin{\&} F).}$$

(b) Tableau de vérité

P	F	N	$A(P,F,N)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

(c) Simplification

$$
\begin{aligned}
A &= (P \mathbin{\&} N) \ \mid\ (F \mathbin{\&} N) \ \mid\ (P \mathbin{\&} F) \\
&= N(P \mid F) \ \mid\ (P \mathbin{\&} F).
\end{aligned}
$$

Forme compacte :

$$\boxed{A = (P \mathbin{\&} F) \ \mid\ \big(N \mathbin{\&} (P \mid F)\big).}$$
