

NSI – Corrigé détail : Calcul booléen & Tables de vérité

Chaque étape est justifiée par une propriété.

Exercice 1 – Corrigé [echauffement]

(a) $a + 0 = \boxed{a}$. *Element neutre de +.*

(d) $a \cdot a = \boxed{a}$. *Idempotence.*

(b) $a \cdot 1 = \boxed{a}$. *Element neutre de ·.*

(e) $a + \bar{a} = \boxed{1}$. *Complementarite.*

(c) $a + a = \boxed{a}$. *Idempotence.*

(f) $a \cdot \bar{a} = \boxed{0}$. *Complementarite.*

Exercice 2 – Corrigé [bases – tables de vérité]

a	b	$a \cdot b$	$a + b$	$\bar{a}$	$a \oplus b$
0	0	0	0	1	0
0	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	1
1	1	1	1	0	0

Rappel : $a \oplus b = \bar{a} \cdot b + a \cdot \bar{b}$.

Exercice 3 – Corrigé [application]

(a) $X_1 = \bar{a} \cdot b + a \cdot \bar{b}$.

$$\boxed{X_1 = a \oplus b}$$

Definition du XOR. Forme equivalente utile : $X_1 = (a + b) \cdot \overline{(a \cdot b)}$.

(b) $X_2 = (a + b) \cdot (\bar{a} + c)$

$$= a\bar{a} + ac + b\bar{a} + bc \quad \text{distributivite}$$

$$= 0 + ac + \bar{a}b + bc$$

$$= \boxed{ac + \bar{a}b} \quad \text{theoreme du consensus : } xy + \bar{x}z + yz = xy + \bar{x}z.$$

Interpretation : si $a = 1$ alors c , sinon b (multiplexeur).

(c) $X_3 = \overline{(a \cdot b)} \cdot (a + b)$

$$= (\bar{a} + \bar{b}) \cdot (a + b) \quad \text{Morgan}$$

$$= a\bar{a} + a\bar{b} + b\bar{a} + b\bar{b}$$

$$= \boxed{a\bar{b} + \bar{a}b} = a \oplus b.$$

Exercice 4 – Corrigé [intermediaire – simplifications guidees]

(a) $E_1 = a + (a \cdot b) = a(1 + b) = \boxed{a}$. *Absorption.*

(b) $E_2 = a(b + c) + \bar{a}(b + c) = (a + \bar{a})(b + c) = \boxed{b + c}$. *Factorisation.*

(c) $E_3 = (a + b) \cdot (a + \bar{b}) = a + b\bar{b} = \boxed{a}$. *Distributivite puis $b\bar{b} = 0$.*

(d) $E_4 = ab + a\bar{b} + \bar{a}b = a(b + \bar{b}) + \bar{a}b = a + \bar{a}b = \boxed{a + b}$. *Absorption $a + \bar{a}b = a + b$.*

Exercice 5 – Corrigé [entrainement avance – demonstrations]

- (a) $a + (\bar{a}b) = (a + \bar{a})(a + b) = 1 \cdot (a + b) = \boxed{a + b}$. (c) $\overline{(a + b)} = \bar{a} \cdot \bar{b}$. *Loi de Morgan (table de verite ou double negation).*
- (b) $a(\bar{a} + b) = a\bar{a} + ab = 0 + ab = \boxed{ab}$. (d) $\overline{(a \cdot b)} = \bar{a} + \bar{b}$. *Autre loi de Morgan.*

Exercice 6 – Corrige [composition]

- (a) $S = AB + C$. *Capteur A et porte B, ou bouton C.*
- (b) $A = V \cdot (K + S) = VK + VS$. *Le badge V est obligatoire.*
- (c) $L = I_1 \oplus I_2 = I_1\bar{I}_2 + \bar{I}_1I_2 = (I_1 + I_2) \cdot \overline{(I_1 \cdot I_2)}$.

Exercice 7 – Corrige [defis – minimisation]

- (a) $F_1 = (a + b)(a + c)(\bar{a} + b)$
 $= (a + b)(\bar{a} + b) = b \Rightarrow F_1 = b(a + c) =$
 $\boxed{ab + bc}$.
Car $(x + y)(\bar{x} + y) = y$.
- (c) $F_3 = ab + \bar{a}b + a\bar{b} + \bar{a}\bar{b}c$
 $= b + a\bar{b} + \bar{a}\bar{b}c = (a + b) + \bar{a}\bar{b}c$
 $= \boxed{a + b + \bar{a}\bar{b}c}$. *Le dernier terme agit seulement quand $a = b = 0$.*
- (b) $F_2 = \bar{a}b + ab + a\bar{c} = b(\bar{a} + a) + a\bar{c} =$
 $\boxed{b + a\bar{c}}$.
- (d) $F_4 = \overline{(a + b + c)} + ab = \boxed{\bar{a}\bar{b}\bar{c} + ab}$. *Termes disjoints, forme minimale DNF.*

Exercice 8 – Corrige [preuve courte – XOR]

$$a \oplus b = \bar{a}b + a\bar{b} = (a + b)(\bar{a} + \bar{b}) = (a + b) \cdot \overline{(a \cdot b)}.$$

Developpement puis Morgan sur $\overline{(a \cdot b)} = \bar{a} + \bar{b}$.

Exercice 9 – Corrige [table -> formule]

$$Y = 1 \text{ pour } 001, 010, 100, 111.$$

Nombre impair de 1 : parite impaire.

$$\boxed{Y = a \oplus b \oplus c}$$

Formes equivalentes : $Y = (a \oplus b) \oplus c$ ou $Y = (a + b + c) \cdot \overline{(ab + ac + bc)}$.

Demonstration de $\overline{(a + b)} = \bar{a} \cdot \bar{b}$.

(1) *Par table de verite.*

a	b	$a + b$	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$\bar{a} \cdot \bar{b}$	$a + b$	$\overline{(a + b)}$
0	0	0	1	1	1	0	1
0	1	1	1	0	0	1	0
1	0	1	0	1	0	1	0
1	1	1	0	0	0	1	0

Les deux dernieres colonnes coincident, donc egalite.

(2) *Par calcul algebrique.*

$$\overline{(a + b)} = \overline{\overline{(\bar{a} \cdot \bar{b})}} = \bar{a} \cdot \bar{b}.$$

Car $a + b = \overline{(\bar{a} \cdot \bar{b})}$ et la double negation restitue l'expression.

Astuce methode : souligner la sous-partie modifiee a chaque ligne et citer la propriete utilisee (distributivite, absorption, Morgan, consensus, etc.).