

Logique booléenne

Simplifications et tableaux de vérité

Symboles utilisés : ET $\&$, OU $|$, NON \bar{a}

Exercice 1 (4 points) Niveau : application — Tableaux de vérité à 2 variables

On considère les variables booléennes a et b .

- (a) Compléter le tableau de vérité de $F(a, b) = a \& b$.
- (b) Compléter le tableau de vérité de $G(a, b) = a | b$.
- (c) Compléter le tableau de vérité de $H(a, b) = \bar{a} \& b$.
- (d) Compléter le tableau de vérité de

$$I(a, b) = (\bar{a} \& b) | (a \& \bar{b}).$$

Pour chaque fonction, indiquer les lignes où la fonction vaut 1.

Exercice 2 (4 points) Niveau : application — Tableaux de vérité à 3 variables

On considère les variables booléennes a , b et c .

- (a) Compléter le tableau de vérité de $F(a, b, c) = a \& (b | c)$.
- (b) Compléter le tableau de vérité de $G(a, b, c) = (a | b) \& \bar{c}$.
- (c) À partir du tableau de F , écrire une expression *somme de produits* (forme développée) qui décrit les lignes où $F = 1$.

Exercice 3 (6 points) Niveau : standard — Simplification d'expressions (2 variables)

Simplifier au maximum les expressions suivantes (utiliser distributivité, absorption, complémentarité, idempotence) :

- (a) $F_1 = a \& (a | b)$
- (c) $F_3 = (a \& b) | (a \& \bar{b})$
- (b) $F_2 = (a | b) \& (a | \bar{b})$
- (d) $F_4 = (a | b) \& (\bar{a} | b)$

Pour chaque expression, donner une forme simplifiée avec le moins de littéraux possible.

Exercice 4 (6 points) Niveau : standard — Simplification d'expressions (3 variables)

Simplifier au maximum les expressions booléennes suivantes :

- (a) $F_1 = (a | b) \& (a | c)$
- (c) $F_3 = (a \& b) | (\bar{a} \& b) | (\bar{b} \& c)$
- (b) $F_2 = (\bar{a} \& b) | (a \& b) | (a \& c)$
- (d) $F_4 = (a \& \bar{b}) | (a \& b) | (\bar{a} \& \bar{b})$

Indiquer à chaque fois la propriété utilisée (absorption, complémentarité, etc.).

Exercice 5 (6 points) Niveau : standard — Tableaux de vérité et simplification

Pour chaque fonction suivante :

- construire le tableau de vérité ;
- en déduire une expression simplifiée.

- (a) $F(a, b, c) = (a \& b) | (\bar{a} \& b) | (a \& \bar{c})$
- (b) $G(a, b, c) = (a | b) \& (a | \bar{c}) \& (\bar{a} | b)$

Exercice 6 (5 points)

On donne les paires d'expressions suivantes :

Niveau : défis — Montrer des équivalences

- (a) $F_1 = a \mid (a \& b)$ et $G_1 = a$
- (b) $F_2 = (a \& b) \mid (a \& \bar{b})$ et $G_2 = a$
- (c) $F_3 = (a \mid b) \& (a \mid \bar{b})$ et $G_3 = a$

Pour chaque paire (F_i, G_i) :

- compléter les tableaux de vérité de F_i et G_i ;
- conclure sur légalité (ou non) entre F_i et G_i .

Exercice 7 (7 points)

Niveau : défis — À partir d'un tableau de vérité

On considère une fonction booléenne $F(a, b, c)$ décrite par le tableau ci-dessous :

a	b	c	$F(a, b, c)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

- (a) À partir du tableau, écrire une expression *somme de produits* (développée) pour $F(a, b, c)$ avec les symboles $\&$ et \mid .
- (b) Simplifier cette expression en utilisant les propriétés des opérations booléennes.

Exercice 8 (8 points)

Niveau : problème — Situation concrète : système d'alarme

On modélise un système d'alarme avec trois capteurs booléens :

- P : la porte est ouverte ($P = 1$) ou fermée ($P = 0$) ;
- F : la fenêtre est ouverte ($F = 1$) ou fermée ($F = 0$) ;
- N : il fait nuit ($N = 1$) ou jour ($N = 0$).

L'alarme se déclenche ($A = 1$) si :

- la porte est ouverte la nuit ;
- ou la fenêtre est ouverte la nuit ;
- ou la porte et la fenêtre sont toutes les deux ouvertes (peu importe qu'il fasse jour ou nuit).

- (a) Écrire une expression booléenne (non simplifiée) pour $A(P, F, N)$ en utilisant $\&$ et \mid .
- (b) Construire le tableau de vérité complet de A .
- (c) Simplifier l'expression de A à l'aide des propriétés booléennes.
